

УДК 004

JEL коды: D89

08.00.13

И.А. Магомедов¹, А.И. Межиева²

¹Чеченский государственный университет, г. Грозный, ул. А. Шерипова 32, ассистент кафедры «Программирование и инфокоммуникационные технологии» факультета информационных технологий,

²Чеченский государственный университет, г. Грозный, ул. А. Шерипова 32, студент кафедры «Бизнес-информатика» факультета информационных технологий

I.A. Magomedov¹, A. I. Mejieva²

¹Chechen State University, Grozny, 32 Sheripova Street, teaching assistant of programming and infocommunications technologies department, faculty of information technologies,

²Chechen State University, Grozny, 32 Sheripova Street, student of business information department, faculty of information technologies

Методика выведения уравнения скорости распространения трещин для расчета динамического анализа

Methods of derivation formula of crack propagation velocity for investigation dynamic problems

Аннотация

Данная работа иллюстрирует выведение уравнения скорости распространения трещины в твердых и хрупких материалах. Работа раскрывает статическое и динамическое состояния материала при инициации и распространения трещины. Вначале будет рассмотрена работа Гриффитса, который внес огромный вклад в развитие исследований связанных с распространением трещин. Его главной задачей была ввести глобальный энергетический баланс системы ($\frac{dW}{dA} = \frac{dU_Y}{dA} + \frac{dU_E}{dA} = 0$) вместо прямого действия на давление вершины трещины и оценить количество энергии. Также был найден фактор интенсивности напряжения (ФИН) $K = \sigma\sqrt{2\pi r}$ и J -интеграл $J = \int_0^{P_0} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_P dP$, которые в отличие от закона Гриффитса действует на давление вершины трещины. В дополнении для вычисления размера пластичной зоны r были использованы первоначальное смещение трещины (ПСТ) и концепция Ирвин. Для выведения уравнения скорости распространения трещины использовалось уравнение Гриффитса, которое впоследствии было модифицировано для динамического распространения трещин. Модель Мотта была использована для вычисления уравнения скорости распространения трещин. Однако уравнение имело неверное предположение о том, что $\frac{dv}{dA} = 0$, и после проведенного анализа данное уравнение можно модифицировать как $v = \sqrt{\frac{2\pi}{k}} c_0 \left(1 - \frac{a_0}{a}\right)$.

Abstract

The following thesis will illustrate derivations of crack propagation's formula for investigating brittle and elastic bodies. This work will at the static and dynamic state of materials for crack initiation and propagation. At the beginning work of Griffiths will be discussed, which put a lots of efforts of developing field related to crack propagation. His main aim was to include global energy balance to a system ($\frac{dW}{dA} = \frac{dU_Y}{dA} + \frac{dU_E}{dA} = 0$) rather a direct influence on pressure at the tip of the crack and estimate energy value. Stress intensity factor $K = \sigma\sqrt{2\pi r}$ (SIF) was found along with J -integral $J = \int_0^{P_0} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_P dP$, which differ from law of Griffiths acts at the tip of the crack. Additionally, for working out the size of plastic zone r initial crack displacement ICD and Irwin's concept were used. For derivation of crack propagation velocity formula Griffiths theory was used, which was modified for dynamic crack propagation. Mott's model was used for crack propagation velocity. However, the following formula has incorrect suggestions that $\frac{dv}{dA} = 0$, so it was modified as follows $v = \sqrt{\frac{2\pi}{k}} c_0 \left(1 - \frac{a_0}{a}\right)$.

Ключевые слова: уравнения скорости распространения трещины; Гриффитс; ФИН; ПСТ; вершина трещины; Ирвин; модель Мотта.

Keywords: *velocity of crack propagations, Griffiths, SIF, ICD, tip of crack, Irwin, Mott's model.*

Механика упругого разлома (МУР)

Статический разлом будет рассмотрен кратко для понимания динамического разлома.

Механика разлома является областью механики, которая изучает формирование и распространение трещин в материалах.

МУР является методом представления качественной меры в хрупком материале, сопротивляющегося формированию трещины.

Гриффитс был первым, кто доказал, что присутствие потоков и внутренних трещин является ключевым пунктом инициирования и распространения разлома в материалах.

МУР может быть описан подходом Гриффитса, который является энергетическим балансом, либо Фактором Интенсивности Напряжения (ФИН).

При применении одного из двух подходов важно понять стадию (mode) расширения трещины.

Существует три различных стадии: открытие, скольжение и разрывание (Рисунок 1). Излом в очень хрупких материалах происходит под режимом I.

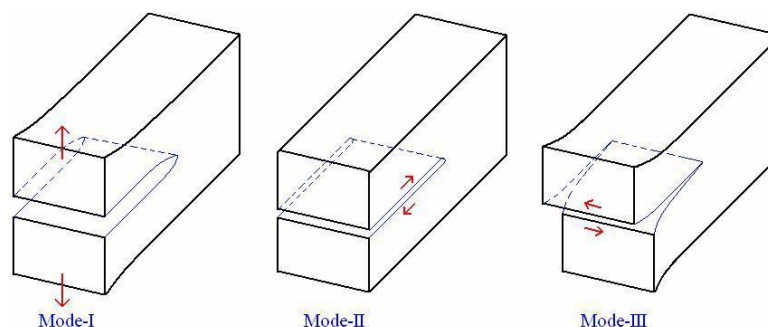


Рисунок 1 Три различных режима: открытие, скольжение и разрывание соответственно

Энергия баланса Гриффитса

Гриффитс применил идею первого закона термодинамики, чтобы понять формирование трещин.

Этот закон гласит следующее: когда система изменяется от неравновесного состояния до состояния равновесия, происходит чистое уменьшение в энергии.

В 1920-ых годах Гриффитс начал свой анализ на стеклах.

Гриффитс проводил исследования при идеальных условиях, где трещины были острыми и материалы имели максимальную степень упругости.

Теория глобального энергетического баланса систем послужила основополагающей идеей в работе Гриффитса. Гриффитс знал о работе Инглиша, которая была направлена на исследования концентрации давления около вершины трещины, когда он начинал свои исследования. Однако, работа Инглиша вводит математическую сложность: давление около вершины трещины приближается к бесконечности с совершенно острой трещиной. Использование такого решения даст почти нулевую силу в материале. Следовательно, приведет к разрыву границ около вершины трещины при действии любой силы на нее. Давление около вершины трещины было определено, используя метод Инглиша как показано ниже в Уравнении 1 [1].

$$\sigma_m = \sigma \left(1 + \frac{2a}{b}\right) \quad (1)$$

Исследуя пластину напряжения (рисунок 2), где σ - давление, примененное статичному телу, начальная длина трещины - $2a$, а $2c$ является длиной увеличенной трещины, которая формирует новую поверхностную зону, освобождая энергию. Гриффитс доказал, что полная

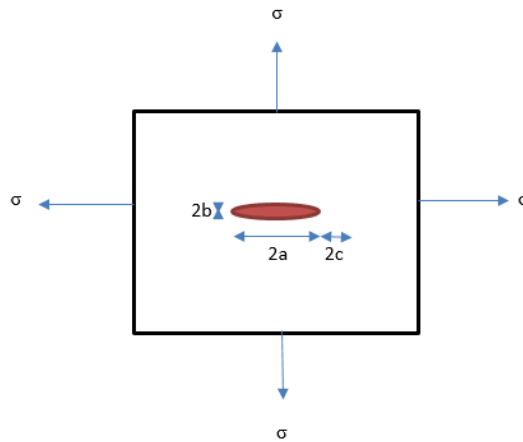


Рисунок 2 Пластина напряжения

энергия системы может быть написана как в уравнении 2, где W - полная энергия системы, dU_γ - энергия, доступная для формирования новых трещин и dU_E - внутренняя потенциальная энергия.

$$\frac{dW}{dA} = \frac{dU_\gamma}{dA} + \frac{dU_E}{dA} = 0 \quad (2)$$

Уравнение может выглядеть как показано внизу (3), где правая сторона представляет сопротивление разлома (fracture resistance), связанное с $G_{critical}$, который является сопротивлением роста трещин (crack growth resistance) в материале R , и левая сторона показывает интенсивность высвобождения напряжения (strain release rate) G [2,3].

$$-\frac{dU_\gamma}{dA} = \frac{dU_E}{dA} \quad (3)$$

Гриффитс показал в своей работе, что внутренняя энергия напряжения находится как показано в Уравнении 4, используя описание Инглиша для давления в трещины, где потенциальная энергия пластины без трещин представлена как U_{E0} с толщиной пластины B . $U_\gamma = 4aB\gamma$, поскольку трещина требует формирования двух новых поверхностей, где γ поверхностная энергия. Значение поверхностной энергии на каждую единицу площади является постоянным, следовательно это линейная функция a . Однако сохраненная энергия

напряжения, освобожденная при распространении трещины, является функцией a^2 и уравнение получает следующую форму.

$$U_E = U_{E0} - \frac{\sigma^2 a^2 \pi B}{E} \quad (4)$$

Новое уравнение может быть выведено, используя уравнения 3 и 4, как показано ниже в Уравнении 5. $U_E + U_Y = 0$.

$$\frac{dU_E}{dA} = -\frac{\sigma^2 a \pi}{E} \quad \text{и} \quad \frac{dU_Y}{dA} = 2\gamma_s \quad (5)$$

Уравнение 6 иллюстрирует формулу давления разлома. E - Модуль Юнга

$$\sigma_f = \left(\frac{2E\gamma_s}{\pi a}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

Фактор интенсивности напряжения (ФИН)

Фактор интенсивности напряжения (ФИН) – инструмент для предопределения давления около вершины трещины. ФИН также определяет, будет ли распространение трещины в структуре, а также измеряет реальные силы, которые применены около вершины трещины (рисунок 4). Как иллюстрировано в Рисунке 2, есть три режима (modes), и каждый из них производит $\frac{1}{\sqrt{r}}$ сингулярность (singularity) около вершины трещины. Следовательно, константа пропорциональности и функция θ зависят от режима. Также фактор интенсивности напряжения K , который равняется $k\sqrt{2\pi}$ или $K = k\sqrt{2\pi}$.

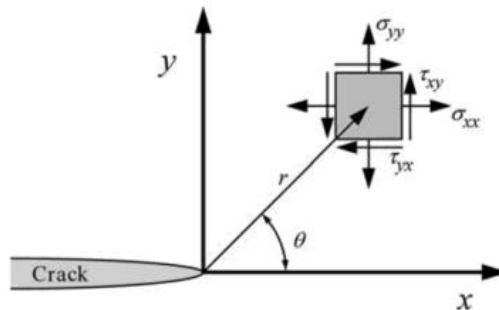


Рисунок 3 область близ вершин трещины

В режиме 1 действующая сила давления располагается перпендикулярно плоскости открытия трещины, следовательно, концентрация давления будет вблизи вершины трещины, как в уравнении 7. Можно заметить, что уравнение слева имеет предположение об использовании изотропного линейно эластичного материала. Предположения сделаны исходя из нелинейного поведения материала близ вершин трещины. Из-за предположения область близ вершин трещины можно исключить из решения, так как данная область значительно мала при сравнении с длиной трещины [4].

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta) \quad K = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma \sqrt{2\pi r} f(\theta) \quad (7)$$

При $\theta = 0$, напряжение сдвига равно нулю, а функция $f = 1$, и получаем уравнение 8, которое объясняет давление вблизи области вершины трещины.

$$\sigma = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \quad (8)$$

Соотношения между K и σ зависят от формы структуры и трещины. Уравнение 8 можно переписать как уравнение 9 для описания трещины (которая проходит сквозь структуры). Калибровочный фактор для сквозной трещины обычно равен единице, следовательно, можно исключить его из уравнения.

$$K = \sigma\sqrt{2\pi r} \quad (9)$$

J-интеграл

Фактор интенсивности напряжения (ФИН) был использован для анализа области вблизи вершины трещины, которая значительно мала при сравнении с масштабом структуры. Однако J-интеграл используется при наличии пластичной зоны, но при этом масштаб не может быть игнорирован. Данная методика дает точные выходные данные при анализе структур, которые имеют эластичные и пластичные свойства при разломе. J-интеграл можно сравнить с интенсивностью выделения энергии (если рассмотреть свойства материала, которые имеют нелинейное поведение) в уравнении 10.

$$J = \frac{dU_E}{dA} \quad (10)$$

При решении задачи J-интеграл не зависит от области вокруг вершины трещины. J-интеграл можно описать как в уравнении 11. J-интеграл имеет более практичное применение, учитывая фактор интенсивности напряжения.

$$J = \int_0^{P_0} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_P dP \quad (11)$$

Первоначальное смещение трещины (ПСТ)

Уэлс был пионером в исследованиях первоначального смещения трещины при анализе структуры с большой областью близ вершины трещины. Данный подход измеряет напряжение близ вершины трещины и показывает, что раскрытие трещины продолжится до критического значения δ_c . Уравнения 12 было сформулировано Ирвином, которое описывает вышеупомянутое.

$$\delta_c = \frac{4K_c^2}{\pi E \sigma_y} \quad (12)$$

где σ_y это предел текучести и можно предположить, что это локализованное пластическое течение при $\frac{\sigma}{\sigma_y}$. ПСТ аналогично (динамическое выделение энергии) G (уравнение 13), которые, в свою очередь, также аналогичны с J-интеграл, однако, только в контексте механики упругого разлома (уравнение 14).

$$G = \sigma_y \delta_c \quad (13)$$

$$G = J = \sigma_y \delta_c \quad (14)$$

Ирвин

Ирвин Ж. Р был выдающимся ученым в сфере механического разлома и был одним из тех, кто предложил фундаментально изменить теорию Гриффитса или прийти к новому подходу в изучении данной области. Ирвин предложил концепцию эффективной поверхностной энергии. Он внес вклад в теорию Гриффитса в области изучения давления на конце трещины. Он показал, что его метод идентичен методу Гриффитса, что продемонстрировано на рисунке 5, где нормальное давление σ (σ_{yy}) может быть показано как в уравнении 8. Исходя из вышеизложенного $\sigma_{ys} = \sigma_{yy}$, что приводит к появлению точки перелома. При замене правой части на предел текучести как в уравнении 8, можно вычислить r (размер пластичной зоны) (Уравнение 15).

$$r = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}}\right)^2 \quad (15)$$

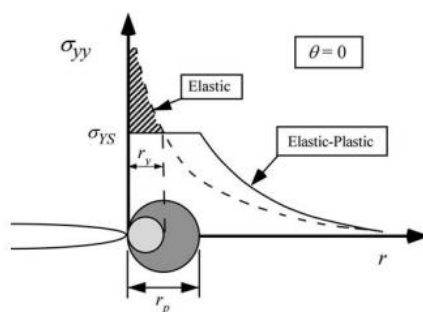


Рисунок 4: Размер пластичной зоны r_p и r_e , соответственно [21]

Динамический разлом

Динамический разрыв можно описать как ветвь механики разрушения, которая связана с явлениями разрушения в масштабе времени, для которого важно инерционное сопротивление материала к движению. Первостепенное внимание уделяется начальной и конечной стадиям распространения трещины, которые проистекают из-за несовершенства материала. Это приводит к концентрации напряжения в области дефекта. Было замечено, что инерция материала может иметь огромное влияние на разрыв в нем. Это означает, что в статическом анализе кинетическая энергия внутри системы и ее воздействие на внутреннюю энергию являются незначительными, при том условии, что трещина будет распространяться или расти устойчивым образом. Следовательно, при динамическом анализе отраженные волны напряжения, инерция материала и поведение материала, зависящее от скорости, становятся существенными переменными в уравнении с телом, которое подвержено нагрузке, зависящей от времени. В этом случае разрушение происходит очень быстро, что не дает времени для формирования пластичной деформации. Поэтому энергия выделяется за короткий промежуток времени, что приводит к быстрому росту трещины [5].

Мотт модель

Были проведены несколько исследований для лучшего понимания хрупкого материала под воздействием резкого удара. Как показали результаты, при соприкосновении ударявшего предмета с хрупким телом, последний разлетается на мелкие куски. Было найдено, что значение деления объекта прямо зависят от силы удара [6-9]. Несмотря на многочисленные исследования данного аспекта, Гриффитс был первым, кто сформулировал энергию баланса системы хрупкого материала, под условием, что анализ будет статическим, для описания распространения трещин (Уравнение 2). После, Мотт исследовал динамическое распространение трещин, используя аналитический метод, рассматривая при этом сквозные трещины (Уравнение 16).

$$G(t) = \frac{dF}{dA} - \frac{dU_E}{dA} - \frac{dE_k}{dA} \quad (16)$$

Где F и U – это работа, совершенная внешней и внутренней силой соответственно. Для определения кинетических значений с помощью данной формулы необходимо соответствие

следующих параметров (критерий): постоянная скорость распространения (раскрытия) трещины в теле при равномерно зависящем от времени напряжении, которое действует перпендикулярно плоскости трещины. Следовательно, используя данные критерии, Мотт преобразовал уравнения Гриффита (Уравнение 2) с кинетическими значениями, в стремлении достигнуть конфигурации, где общая энергия будет константой. Кинетическая энергия E_k для тела с трещиной была раскрыта, как показано в уравнении 17, которое описывает быстрое распространение трещины, учитывая значения давления.

$$E_k = \frac{1}{2} k^2 a^2 v^2 \rho \left(\frac{\sigma}{E}\right)^2 \quad (17)$$

Где k - это константа зависящая от скорости распространения трещины, σ – напряжение (давление), перпендикулярное плоскости трещины и ρ - масса на единицу площади пластины. Следовательно, подставляя кинетическую энергию из уравнения 17 и уравнения 4 в модифицированный энергетический баланс Гриффитса (Уравнение 16) можно получить динамическую скорость высвобождения энергии (Уравнение 18).

$$G(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{da} \left[\frac{\pi \sigma^2 a^2}{E} \right] - \frac{1}{2} \frac{d}{da} \left[\frac{k}{2} \rho a^2 v^2 \left(\frac{\sigma}{E}\right) \right] = 2\gamma \quad (18)$$

Где γ - работа разрушения или поверхностная энергия в идеально хрупком материале. Так как $G(t)$ равно константе γ на стадии иницирования трещины, то уравнение получит форму, как показано ниже.

$$2\gamma = \frac{1}{2} \frac{d}{da} \left[\frac{\pi \sigma^2 a^2}{E} \right] - \frac{1}{2} \frac{d}{da} \left[\frac{k}{2} \rho a^2 v^2 \left(\frac{\sigma}{E}\right) \right] \quad (19)$$

Правую часть уравнения (Формула 19) можно дифференцировать, игнорируя кинетические термины (Уравнение 20).

$$2\gamma = \frac{\pi \sigma^2 a}{E} \quad (20)$$

Из уравнения 20 можно вывести значение a и получить уравнение 21. Также можно заметить, что в данном уравнении $a = a_0$.

$$a_0 = \frac{2E\gamma}{\pi \sigma^2} \quad (21)$$

Скорость трещины

Уравнение скорости трещины было впервые выведено Моттом, однако его предположение, что $\frac{dv}{da} = 0$ было неверным. Впоследствии, Дулани, Брейс и Берри модифицировали уравнение Мотта и получили уравнение 22.

$$v = \sqrt{\frac{2\pi}{k}} c_0 \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \quad (22)$$

Где $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, что является скоростью звука для распространения 1D-волн через материал. Уэллс и Робертс получили приближенное значение для k , и после нескольких предположений они доказали, что $\sqrt{\frac{2\pi}{k}} \approx 0.38$. Когда $a > a_0$, скорость трещины достигает своего предельного значения и уравнение 22 становится неустойчивым при $0.38c_0$. Фрейнд был тем, кто сделал более глубокий численный анализ и вывел следующее соотношение (Уравнение 23).

$$v = c_r \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \quad (23)$$

Где c_r - это скорость волны Райли, которая была вычислена при использовании экспериментального метода и которая доказала что скорость трещины не достигает c_r (обычно $0.6c_0$), или находится в пределах $0.2-0.4c_0$. При случае, когда $\gamma = 0$, раскрывающаяся трещина

должна двигаться со скоростью Райли c_r . В уравнении 22 и 23 максимальность скорости не зависит от энергии разлома, следовательно, скорость распространения трещины равна c_r для всех γ .

Литература

[1] Karlsson, S. (2012). *Modification of float glass surfaces by ion exchange*. [online] Lnu.diva-portal.org. Available at: <http://lnu.diva-portal.org/smash/get/diva2:525482/FULLTEXT01> [Accessed 13 Feb. 2016].

[11] Dubiel, M., J. Haug, H. Kruth, H. Hofmeister, and K.-D. Schicke, Ag/Na ion exchange in soda-lime glasses and the formation of small Ag nanoparticles. *Materials science & engineering. B, Solid-state materials for advanced technology*, 2008. 149(2): p. 146.

[3] Lunden, I. (2016). *Led By iPhone 6, Apple Passed Samsung In Q4 Smartphone Sales, 1.9B Mobiles Sold Overall In 2014*. [online] TechCrunch. Available at: <http://techcrunch.com/2015/03/03/led-by-iphone-6-apple-passed-samsung-in-q4-smartphone-sales-1-9b-mobiles-sold-overall-in-2014/#.fdcih1:8exz> [Accessed 31 Mar. 2016].

[4] Crump, T., Ferté, G. and Mummery, P. (2015). *DYNAMIC FRACTURE EFFECTS ON REMOTE STRESS AMPLIFICATION IN AGR GRAPHITE BRICKS*. SMiRT-23, 80.

[5] Nouby, M. and Srinivasan, K. (2015). *Simulation of the structural modifications, Part D: Journal of Automobile Engineering*, [online] 225(5), pp.653-672. Available at: <http://pid.sagepub.com/content/225/5/653> [Accessed 26 Mar. 2015].

[6] Wagner, Fleming, and Petri, (n.d.). *Static and dynamic crack propagation in brittle materials with XFEM*.

[7] Anderson, T. (2005). *Fracture mechanics*. Boca Raton, FL: Taylor & Francis.

[8] E.E. Gdoutos. *Fracture Mechanics: An Introduction, volume 123 of Solid mechanics and its applications*. Springer, 2006. ISBN 9781402031533.

[9] Li, J., Huang, Q. and Ren, X. (2013). *Dynamic Initiation and Propagation of Multiple Cracks in Brittle Materials*. *Materials*, 6(8), pp.3241-3253.